

Ejercicios: órbitas, estaciones, fases y eclipses

Nueve ejercicios graduados: tercera ley de Kepler para planetas y satélites, ley de Hubble-Lemaître, altura del Sol y estaciones, mes sinódico, fases y eclipses, la medida de Eratóstenes y la aportación de Leavitt y Lemaître.

DURACIÓN

2 sesiones de 55 min

AGRUPACIÓN

individual, con corrección en parejas

UNIDAD 6

El universo, el sistema solar y la Tierra: origen y movimientos

MATERIALES

- Calculadora científica (en modo grados para la trigonometría)

ENCAJE CURRICULAR · Saberes C.1, C.2 · Comp. específicas CE2, CE4, CE5 · Comp. clave STEM, CCL, CPSAA, CC

Criterios: 2.2, 4.1, 4.2, 5.1

Datos: $GM(\text{Tierra}) = 3,9860 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (NASA); radio medio terrestre, 6371 km (para órbitas inclinadas, como la de la Estación Espacial); radio ecuatorial, 6378 km (para satélites sobre el ecuador o de período fijo, como el ejercicio 3); 1 au = 149 597 870 700 m (exacta, IAU 2012); inclinación del eje, $23,44^\circ$; perihelio, $147,095 \times 10^6 \text{ km}$; afelio, $152,100 \times 10^6 \text{ km}$ (NASA). Para los planetas, con T en años y a en au: $T^2 = a^3$.

Ejercicios

- 1. Tercera ley de Kepler en el sistema solar.** a) Marte está a 1,524 au del Sol. Calcula su período en años y en días, y compáralo con el valor de la NASA, 687,0 días. b) Júpiter tarda 11,86 años en dar una vuelta al Sol. ¿A qué distancia está, en au? c) ¿Por qué la constante de la ley es la misma para todos los planetas?
- 2. La Estación Espacial Internacional.** Orbita a unos 420 km sobre la superficie. Calcula su período en minutos y cuántas vueltas da a la Tierra en un día. Haz el análisis de unidades.
- 3. Satélites GPS.** Los satélites del sistema GPS dan dos vueltas a la Tierra por cada día sidéreo, así que su período es de 43 082 s. Calcula el radio de su órbita y su altura. Comprueba el resultado con la órbita geoestacionaria (42 164 km) usando solo la proporción de la tercera ley.
- 4. Ley de Hubble-Lemaître.** a) ¿A qué velocidad se aleja una galaxia situada a 100 Mpc, si $H_0 = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$? b) Repite el cálculo con $H_0 = 73,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. c) Un compañero dice que uno de los dos valores «está mal calculado». ¿Qué le responderías?
- 5. Las estaciones en Madrid** ($\varphi = 40,42^\circ \text{ N}$). a) Calcula la altura del Sol al mediodía en los dos solsticios y en los equinoccios. b) ¿Cuántas veces más energía llega por metro cuadrado de suelo horizontal al mediodía del solsticio de junio que al del de diciembre? (Proporcional a $\sin h$; ignora la atmósfera.) c) Compara ese factor con el efecto de la distancia al Sol entre el perihelio y el afelio. d) ¿Qué sombra da un palo vertical de 1,50 m al mediodía de un equinoccio?

- 6. Mes sidéreo y mes sinódico.** La Luna da una vuelta respecto a las estrellas en 27,3217 días. Calcula el tiempo entre dos lunas llenas con $1/T_{\text{sin}} = 1/T_{\text{sid}} - 1/T_{\text{año}}$ ($T_{\text{año}} = 365,256$ días) y explica con un dibujo por qué es más largo.
- 7. Fases y eclipses.** Di si es verdadero o falso y corrige las falsas: a) Puede haber un eclipse de Luna en cuarto creciente. b) La fase de cuarto menguante se debe a que la sombra de la Tierra tapa la mitad de la Luna. c) No hay eclipses todos los meses porque la órbita de la Luna está inclinada respecto a la de la Tierra. d) Un eclipse de Sol puede ocurrir en luna llena. e) La Luna gira sobre sí misma.
- 8. Eratóstenes y las cifras.** Según Cleomedes, el ángulo de la sombra en Alejandría era $1/50$ de circunferencia y la distancia a Siena, 5000 estadios. a) Calcula la circunferencia en estadios. b) Pásala a kilómetros suponiendo que el estadio medía 157,5 m y, después, 185 m. Compara con 40 000 km. c) ¿Se puede afirmar con qué porcentaje de error midió Eratóstenes la Tierra? Justifícalo.
- 9. Ciencia colectiva.** En unas 10 líneas, explica qué aportaron Henrietta Swan Leavitt y Georges Lemaître al descubrimiento de la expansión del universo y por qué la IAU recomendó en 2018 cambiar el nombre de la ley de Hubble. Usa al menos una fuente primaria o institucional y cítala.

Solución orientativa

Para el profesorado: pasos de la resolución del ejercicio.

1. 1. a) $T = a^{3/2} = 1,524^{1,5} = 1,881$ años = $1,881 \times 365,256$ días = 687,2 días; la NASA da 687,0 días. b) $a = T^{2/3} = 11,86^{2/3} = 5,201$ au. c) La constante de la ley es $4\pi^2/(GM_{\odot})$ y depende solo de la masa del Sol, que es la misma para todos los planetas; con años y au vale 1.
2. 2. $r = 6,371 \times 10^6 \text{ m} + 4,20 \times 10^5 \text{ m} = 6,791 \times 10^6 \text{ m}$. $T = 2\pi \sqrt{r^3/GM} = 2\pi \sqrt{(6,791 \times 10^6)^3 / 3,9860 \times 10^{14}} \text{ s} = 5,569 \times 10^3 \text{ s} = 92,8 \text{ min}$. Vueltas al día: $86\,400 \text{ s} / 5569 \text{ s} = 15,5$. Análisis de unidades: $\sqrt{(\text{m}^3 / (\text{m}^3 \text{ s}^{-2}))} = \text{s}$.
3. 3. $T = 43\,082 \text{ s}$. $r = \sqrt[3]{(GM T^2 / 4\pi^2)} = \sqrt[3]{(3,9860 \times 10^{14} \times 43\,082^2 / 39,48)} \text{ m} = 2,656 \times 10^7 \text{ m} = 26\,560 \text{ km}$; altura = $26\,560 - 6378 = 20\,180 \text{ km}$, que coincide con la altura de los satélites GPS, unos 20 200 km (gps.gov, *Space Segment*: <https://www.gps.gov/space-segment>). Comprobación con la tercera ley: si el período es la mitad, el radio se multiplica por $(1/2)^{2/3} = 0,630$: $42\,164 \text{ km} \times 0,630 = 26\,560 \text{ km}$.
4. 4. a) $v = H_0 d = 67,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \times 100 \text{ Mpc} = 6740 \text{ km/s}$ ($6,74 \times 10^3 \text{ km/s}$). b) Con $73,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $v = 7304 \text{ km/s}$, un 8,4 % más. c) No es un error de cálculo: son dos medidas de H_0 por métodos distintos (radiación de fondo y cefeidas con supernovas) cuya diferencia supera las incertidumbres. Es la tensión de Hubble, un problema abierto; no invalida la expansión del universo.
5. 5. a) Madrid, $\phi = 40,42^\circ$. Solsticio de junio: $h = 90^\circ - 40,42^\circ + 23,44^\circ = 73,02^\circ$. Diciembre: $h = 90^\circ - 40,42^\circ - 23,44^\circ = 26,14^\circ$. Equinoccios: $h = 49,58^\circ$. b) $\sin 73,02^\circ / \sin 26,14^\circ = 0,9564 / 0,4405 = 2,17$. c) $(152,100 / 147,095)^2 = 1,069$: un 7 % más en enero que en julio. El efecto de la inclinación (factor 2,17, a favor del verano) es mucho mayor que el de la distancia (factor 1,07, a favor del invierno en el hemisferio norte). d) Sombra = $1,50 \text{ m} / \tan 49,58^\circ = 1,28 \text{ m}$.
6. 6. $1/T_{\text{sin}} = 1/27,3217 - 1/365,256 = 0,036\,601 - 0,002\,738 = 0,033\,863 \text{ día}^{-1}$; $T_{\text{sin}} = 29,53$ días. Mientras la Luna da una vuelta respecto a las estrellas, la Tierra avanza unos 27° en su órbita ($27,32/365,26 \times 360^\circ$), y la Luna tiene que recorrer ese ángulo de más para volver a la misma posición respecto al Sol, unos 2,2 días.
7. 7. a) Falso: un eclipse de Luna solo puede ocurrir en luna llena (la Tierra entre el Sol y la Luna). b) Falso: las fases dependen de la parte de la mitad iluminada que se ve desde la Tierra; la sombra de la Tierra solo interviene en los eclipses de Luna. c) Verdadero: la órbita lunar está inclinada $5,145^\circ$ respecto a la eclíptica y solo hay eclipse si la luna nueva o llena está cerca de un nodo. d) Falso: un eclipse de Sol solo ocurre en luna nueva. e) Verdadero: se ve siempre la misma cara porque la rotación de la Luna es sincrónica, no porque no gire.
8. 8. a) $C = 50 \times 5000 = 250\,000$ estadios. b) Con 157,5 m: $250\,000 \times 157,5 \text{ m} = 3,94 \times 10^7 \text{ m} = 39\,400 \text{ km}$ (un 1,6 % menos que 40 000 km). Con 185 m: $250\,000 \times 185 \text{ m} = 4,63 \times 10^7 \text{ m} = 46\,300 \text{ km}$ (un 16 % más). c) La conclusión no puede ser «acertó con un error del 1,6 %»: como no se conoce el estadio usado ni si el valor fue 250 000 o 252 000 estadios, el porcentaje depende de una suposición. Lo sólido es el método (ángulo de la sombra y distancia norte-sur) y que da el orden de magnitud correcto.
9. 9. Respuesta abierta. Se valora que mencione: que Leavitt (circular 173 del Observatorio del Harvard College, 1912) halló la relación período-luminosidad de las cefeidas, sin la cual no se podían medir distancias a otras galaxias; que Lemaître propuso en 1927 la expansión del universo, antes que el artículo de Hubble de 1929; que en 2018 la IAU recomendó llamar a la ley «de Hubble-Lemaître»; y que la ley necesitó física teórica, medidas fotométricas y espectroscópicas, y el trabajo de muchas personas cuya aportación no siempre se reconoció a tiempo. Error que debe evitarse: atribuir el descubrimiento a una sola persona.